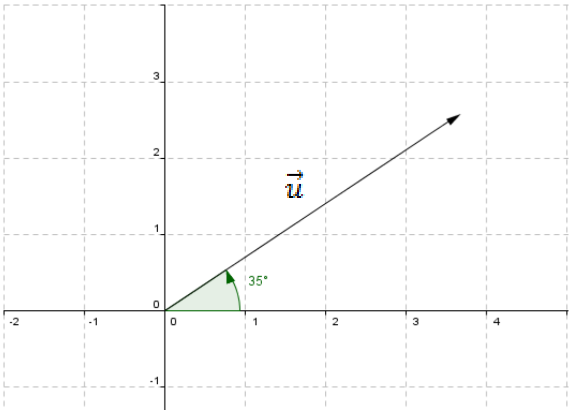
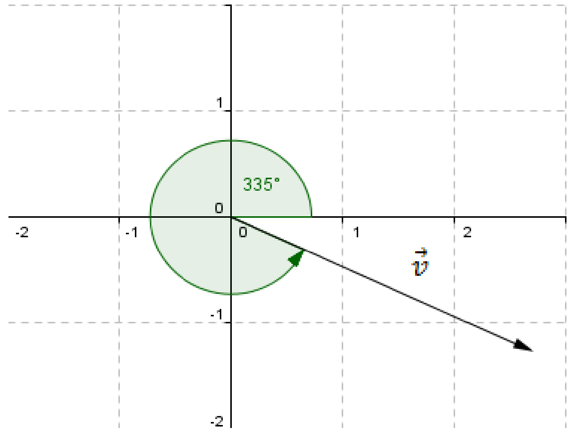
Question 1

Tracer les vecteurs suivants.

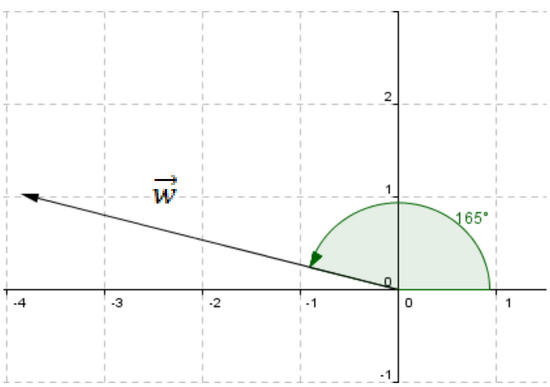
$\|\vec{u}\|$ de 4,5 cm, α = 35°



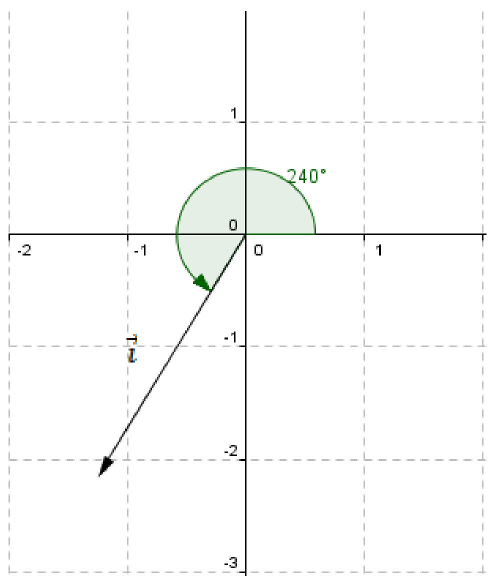
$\|\vec{v}\|$ de 3 cm, α = 335°



$\|\vec{w}\|$ de 4 cm, α = 165°



$\|\vec{i}\|$ de 2,5 cm, α = 240°



Question 2

Trouver les composantes et la norme des vecteurs suivants. Arrondir au dixième près.

a) Le vecteur AB, étant donné
A (3, 6) et B (4, 0)

$$\overrightarrow{AB} = (4-3, 0-6) = (1, -6)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = 6{,}1$$

c) Le vecteur BA, étant donné
A (-4, 2) et B (-2, -8)

$$\overrightarrow{BA} = (-4-(-2), 2-(-8)) = (-2, 10)$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-2)^2 + 10^2} = 10{,}2$$

b) Le vecteur CD, étant donné
C (-3; 6,2) et D (-4,5 ; 0)

$$\overrightarrow{CD} = (-4{,}5 - (-3);\ 0 - 6{,}2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-1{,}5;\ -6{,}2)$$

$$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + (-6{,}2)^2} = 6{,}4$$

d) Le vecteur CB, étant donné
B (0,5) et C (0,-3)

$$\overrightarrow{CB} = (0-0, 5-(-3)) = (0, 8)$$

$$\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$$

Question 3

Trouver la norme et l'angle d'orientation des vecteurs suivants. Arrondir au dixième près.

a) $\overrightarrow{AB} = (0, 5)$ **X positif et Y positif donc** $\boldsymbol{\alpha = \theta}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

$$\tan\theta = \frac{|5|}{|0|} \quad \Rightarrow \quad \theta = 90°$$

$$\alpha = \theta = 90°$$

b) $\overrightarrow{CD} = (-8,\ 0)$ **X négatif et Y positif donc** $\boldsymbol{\alpha = 180° - \theta}$

$$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$$

$$\tan\theta = \frac{|0|}{|-8|} \quad \Rightarrow \quad \theta = 0°$$

$$\alpha = 180° - 0° = 180°$$

c) $\overrightarrow{EF} = (-4,\ -4)$ **X négatif et Y négatif donc** $\boldsymbol{\alpha = 180° + \theta}$

$\|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 5{,}7$ $\tan\theta = \dfrac{|-4|}{|-4|}$ ⇨ $\theta = 45°$

$\alpha = 180° + 45° = 225°$

d) $\overrightarrow{AB} = (3,\ -5)$ **X positif et Y négatif donc** $\boldsymbol{\alpha = 360° - \theta}$

$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = 5{,}8$ $\tan\theta = \dfrac{|-5|}{|3|}$ ⇨ $\theta = 59°$

$\alpha = 360° - 59° = 301°$

e) $\overrightarrow{AB} = (-1{,}5;\ 6{,}2)$ **X négatif et Y positif donc** $\boldsymbol{\alpha = 180° - \theta}$

$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 6{,}2^2} = 6{,}4$ $\tan\theta = \dfrac{|6{,}2|}{|-1{,}5|}$ ⇨ $\theta = 76{,}4°$

$\alpha = 180° - 76{,}4° = 103{,}6°$

Question 4

Trouver les composantes horizontales et verticales des vecteurs suivants.

a) $\|\vec{v}\| = 10 \quad \alpha = 100°$

$x = 10\cos 100° = -1{,}7$ $y = 10\sin 100° = 9{,}8$

b) $\|\vec{v}\| = 8 \quad \alpha = 30°$

$x = 8\cos 30° = 6{,}9$ $y = 8\sin 30° = 4$

c) $\|\vec{v}\| = 7 \quad \alpha = 225°$

$x = 7\cos 225° = -4{,}9$ $y = 7\sin 225° = -\ 4.9$

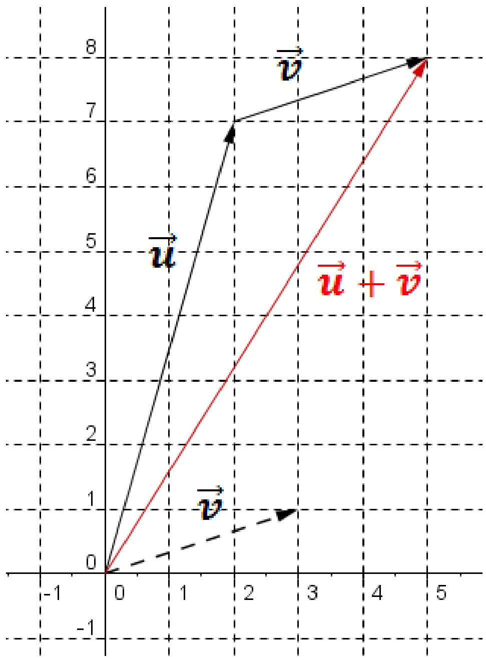
d) $\|\vec{v}\| = 3 \quad \alpha = 300°$

$x = 3\cos 300° = 1{,}5$ $y = 3\sin 300° = -\ 2{,}6$

Question 5

À l'aide de la méthode géométrique du triangle, faire l'addition ou la soustraction des vecteurs suivants. Effectuer aussi la preuve algébrique.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

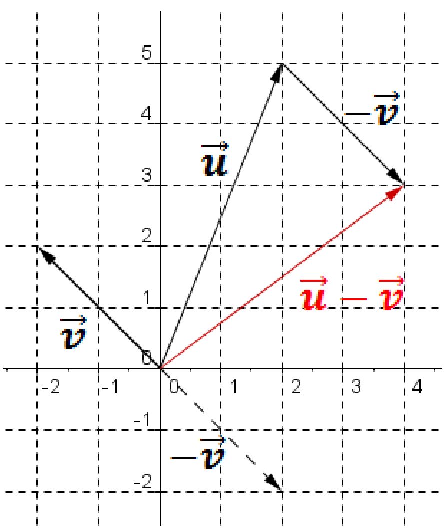


$\vec{u} = (2{,}7)$

$\vec{v} = (3{,}1)$

$\vec{u} + \vec{v} = (2 + 3, 7 + 1) = (5{,}8)$

b) $\vec{u} - \vec{v}$



$\vec{u} = (2{,}5)$

$\vec{v} = (-2{,}2)$

$-\vec{v} = (2,-2)$

$\vec{u} + -\vec{v} = (2 + 2, 5 + (-2)) = (4{,}3)$

Question 6

Faire algébriquement l'addition ou la soustraction des vecteurs suivants. Exprimer le vecteur résultant par sa norme et son angle d'orientation.

a) Soit $\|\vec{v}\| = 6 \quad \alpha = 10°$ et $\|\vec{u}\| = 10 \quad \alpha = 45°$
Calculer la norme et l'angle d'orientation de $\vec{v} + \vec{u}$

$\vec{v}$	$\vec{u}$	$\vec{v} + \vec{u}$
$x = \|\vec{v}\| \cos \alpha$ $x = 6 \cos 10°$ $x = 5{,}91$ $y = \|\vec{v}\| \sin \alpha$ $y = 6 \sin 10°$ $y = 1{,}04$	$x = \|\vec{u}\| \cos \alpha$ $x = 10 \cos 45°$ $x = 7{,}07$ $y = \|\vec{u}\| \sin \alpha$ $y = 10 \sin 45°$ $y = 7{,}07$	$x = 5{,}91 + 7{,}07$ $x = 12{,}98$ $y = 1{,}04 + 7{,}07$ $y = 8{,}11$ $\|\vec{v} + \vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\|\vec{v} + \vec{u}\| = \sqrt{12{,}98^2 + 8{,}11^2} = 15{,}31$ $\tan \theta = \frac{\lvert y \rvert}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert 8{,}11 \rvert}{\lvert 12{,}98 \rvert} = 0{,}6248$ $\theta = \tan^{-1} 0{,}6248 = 32°$ **<u>X positif et Y positif donc:</u>** $\alpha = \theta = 32°$

b) Soit $\|\vec{v}\| = 25 \quad \alpha = 50°$ et $\|\vec{u}\| = 9 \quad \alpha = 120°$
Calculer la norme et l'angle d'orientation de $\vec{v} - \vec{u}$

$\vec{v}$	$\vec{u}$	$-\vec{u}$
$x = \|\vec{v}\| \cos\alpha$ $x = 25 \cos 50°$ $x = 16{,}07$ $y = \|\vec{v}\| \sin\alpha$ $y = 25 \sin 50°$ $y = 19{,}15$	$x = \|\vec{u}\| \cos\alpha$ $x = 9 \cos 120°$ $x = -4{,}5$ $y = \|\vec{u}\| \sin\alpha$ $y = 9 \sin 120°$ $y = 7{,}79$	$x = -(-4{,}5) = 4{,}5$ $y = -7{,}79$

$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$	
$x = 16{,}07 + 4{,}5$ $x = 20{,}57$ $y = 19{,}15 + (-7{,}79)$ $y = 11{,}36$	$\|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{20{,}57^2 + 11{,}36^2} = 23{,}50$ $\tan\theta = \frac{\lvert y \rvert}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert 11{,}36 \rvert}{\lvert 20{,}57 \rvert} = 0{,}5523$ $\theta = \tan^{-1} 0{,}5523 = 28{,}91°$ **<u>X positif et Y positif donc:</u>** $\alpha = \theta = 28{,}91°$

Question 7

Pour chacun des vecteurs, effectuer l'opération demandée.

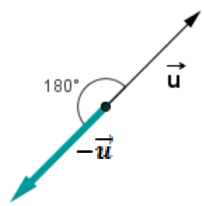
a) Soit $\vec{u} = (5,4)$, trouver les composantes de $3\vec{u}$

$$3\vec{u} = 3 \times (5,4) = (3 \times 5, 3 \times 4) = (15,12)$$

b) Soit $\|\vec{u}\| = 5 \;\; et\; \alpha = 40°$, trouver la norme et l'angle d'orientation de $-2\vec{u}$

$$\|-2\vec{u}\| = \|2\vec{u}\| = 2 \times \|\vec{u}\| = 2 \times 5 = 10$$

$$\alpha = 40° + 180° = 220°$$



Deux vecteurs de sens opposé ($\vec{u}\; et - \vec{u}$)

forment toujours un angle de 180° entre eux.

c) Soit $\vec{u} = (-1,3)$, trouver les composantes de $-\frac{3}{4}\vec{u}$

$$-\frac{3}{4}\vec{u} = -\frac{3}{4} \times (-1,3) = \left(-\frac{3}{4} \times (-1), -\frac{3}{4} \times 3\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}\right)$$

d) Soit $\|\vec{u}\| = 10 \;\; et\; \alpha = 110°$, trouver la norme et l'angle d'orientation de $3\vec{u}$

$$\|3\vec{u}\| = 3 \times \|\vec{u}\| = 3 \times 10 = 30$$

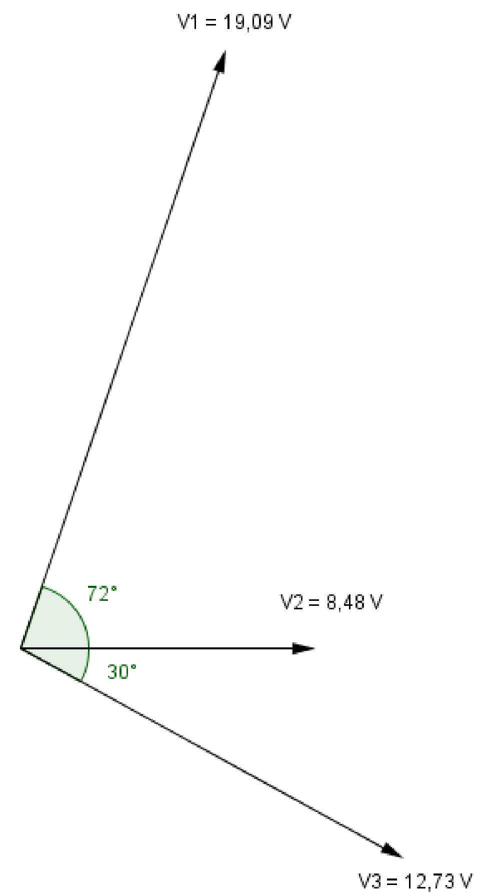
$$\alpha = 110°$$

Un vecteur obtenu par produit scalaire possède toujours le même angle d'orientation que le vecteur original.

Question 8

Revenons sur la mise en situation de cette section :

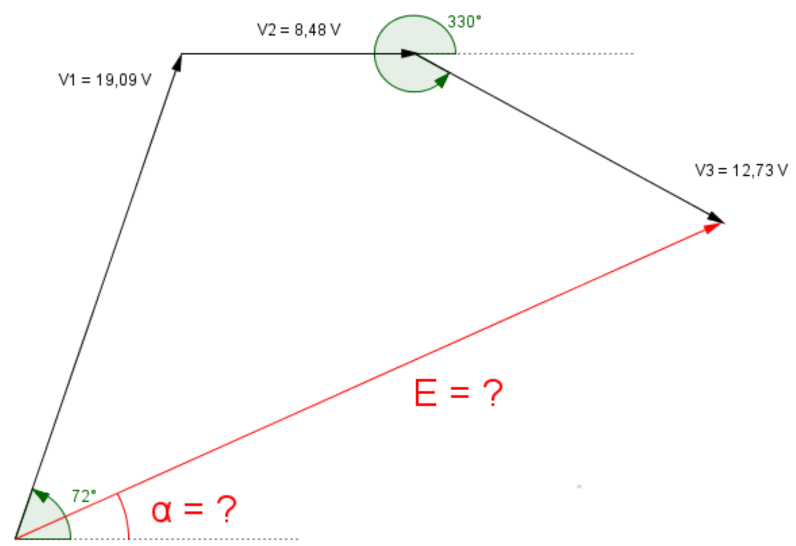
Un de vos collèges de travail a observé à l'aide d'un oscilloscope les ondes V1, V2 et V3 d'un circuit électrique. Il a dessiné les vecteurs de phase qui représentent ces ondes et vous transmet l'information suivante :



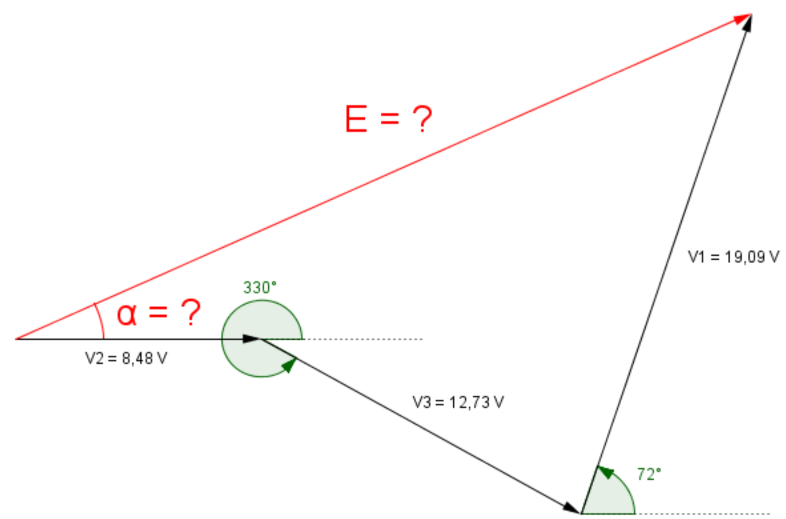
Il vous demande de calculer la tension de la source E de ce circuit. Comment allez-vous procéder?

Vous savez que la tension de la source E est la somme vectorielle des tensions aux bornes des charges soit V1, V2 et V3. Il vous suffit donc d'effectuer cette opération pour obtenir le résultat.

Afin d'obtenir une meilleur idée du résultat, vous vous empressez de dessiner l'addition vectorielle en mettant bout à bout les vecteurs V1, V2 et V3. Vous savez que l'origine du vecteur résultant coïncide avec l'origine du premier vecteur (V1), de même que son extrémité coïncide avec l'extrémité du dernier vecteur (V3). Avec ce dessin, vous obtenez ainsi une bonne idée du vecteur résultant.



L'ordre dans lequel les vecteurs sont additionnés est sans importance. Vous obtiendriez le même vecteur résultant avec n'importe quel ordre, comme on peut le constater avec le dessin suivant :



Pour obtenir la norme et l'angle d'orientation du vecteur résultant E, il nous faut d'abord connaitre ses composantes en calculant la somme des composantes de chacun des vecteurs V1, V2 et V3.

$\overrightarrow{V_1}$	$\overrightarrow{V_2}$	$\overrightarrow{V_3}$
$x = \lVert\overrightarrow{V_1}\rVert \cos\alpha$ $x = 19{,}09 \cos 72°$ $x = 5{,}90$ $y = \lVert\overrightarrow{V_1}\rVert \sin\alpha$ $y = 19{,}09 \sin 72°$ $y = 18{,}16$	$x = \lVert\overrightarrow{V_2}\rVert \cos\alpha$ $x = 8{,}48 \cos 0°$ $x = 8{,}48$ $y = \lVert\overrightarrow{V_2}\rVert \sin\alpha$ $y = 8{,}48 \sin 0°$ $y = 0$	$x = \lVert\overrightarrow{V_3}\rVert \cos\alpha$ $x = 12{,}73 \cos 330°$ $x = 11{,}02$ $y = \lVert\overrightarrow{V_3}\rVert \sin\alpha$ $y = 12{,}73 \sin 330°$ $y = -6{,}37$

Vecteur résultant $\vec{E}$
$x = 5{,}90 + 8{,}48 + 11{,}02 = 25{,}4$ $y = 18{,}16 + 0 - 6{,}37 = 11{,}79$ $\lVert\vec{E}\rVert = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25{,}4^2 + 11{,}79^2} = \sqrt{784{,}16} = 28$ $\tan\theta = \frac{\lvert y\rvert}{\lvert x\rvert} = \frac{\lvert 11{,}79\rvert}{\lvert 25{,}4\rvert} = \frac{11{,}79}{25{,}4} = 0{,}4642$ $\theta = \tan^{-1} 0{,}4642 = 24{,}90°$ **X positif et Y positif donc:** $\alpha = \theta = 24{,}90°$