MAT-4072-2

Mathématiques d'appoint pour l'électricité

Section 2

Proportions et produit croisé

Site web CSPO : http://revimathfp.weebly.com/

Site « Allo prof »

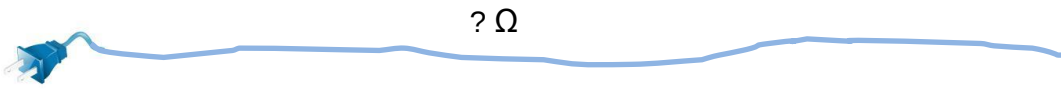
Sylvie Leblond
Gilles Coulombe

Mise en situation

On vous a appris, en électricité, que plus un fil est long, plus il résiste au courant, et moins il laisse passer ce dernier.

Vous avez une rallonge de 2,5 mètres de long qui vous permet de brancher plusieurs appareils.Votre rallonge offre une résistance de 9,6 Ω.

Quelle serait la résistance d'une rallonge de 6 mètres?



Calcul de rapports

Les **rapports** comparent deux valeurs de même nature (de même unité de mesure).

On exprime un rapport à l'aide de deux points superposés ou à l'aide d'une barre de fraction. Si on veut comparer une quantité « a » avec une quantité « b », on peut exprimer ce rapport de deux façons, soit :

$a : b$ et $\frac{a}{b}$

En général, un rapport n'a pas d'unités de mesure, les unités étant les mêmes pour les deux grandeurs, elles s'annulent.

10 hommes = 10 = 1 = 0,5
20 hommes 20 2

La traduction d'énoncés en rapport

Pour traduire un énoncé sous forme de rapport, on doit respecter les étapes suivantes:

1. On repère deux grandeurs à comparer.

2. On s'assure que les deux grandeurs repérées ont les mêmes unités.

3. À moins que l'on exige de représenter le rapport autrement, on peut écrire sous forme de fraction la plus petite grandeur au numérateur et la plus grande au dénominateur.

4. On peut simplifier le rapport à une plus simple expression, sans unité.

Voici quelques exemples d'énoncés traduits en rapports.

1) Sur les 36 filles de la classe de gymnastique, 18 ont les cheveux longs. Quel rapport traduit cette situation ?

Les deux grandeurs à comparer sont :
-36 filles;
-18 filles aux cheveux longs.

Les unités des grandeurs repérées sont les mêmes :
36 filles et 18 filles.

La plus petite grandeur est « 18 filles ». Elle représente le numérateur de notre fraction, alors que le « 36 filles » représente le dénominateur.

Le rapport sera:

$$\frac{18\ filles}{36\ filles} = \frac{1}{2}$$

Cela signifie qu'une fille sur deux dans la classe a les cheveux longs.

2) J'ai acheté 100 grammes de bonbons. J'ai donné 10 grammes à mon ami Paul. Quel rapport traduit cette situation ?

Les deux grandeurs à comparer sont:

-100 grammes de bonbons achetés;
-10 grammes de bonbons donnés.

La plus petite grandeur est « 10 grammes ». Elle représente le numérateur de notre fraction, alors que le « 100 grammes » représente le dénominateur.

La notation décimale sera:

$$\frac{10\ grammes}{100\ grammes} = \frac{1}{10}$$

Cela signifie qu'à tous les 10 grammes je donne 1 gramme à Paul.

Exercice 1

Établir le rapport demandé sous sa forme simplifiée.

1. Pour faire une recette de gâteau, je mélange 450 ml de lait et 125 ml de jus de pommes. Quel est le rapport entre les volumes de jus de pommes et de lait?

2. Il existe une grande variété de bâtons d'hockey et les prix varient de 50$ à 450$. Quel est le rapport entre le prix du bâton le plus cher et celui le moins cher?

3. Jean fait une course de 200 km à vélo et il a déjà fait 125 km. Quel est le rapport entre la distance déjà parcourue par Jean et la distance totale à parcourir?

4. Dans son potager, Martine a semé 64 plants de tomates au début du printemps. Sur les 64 plants, 20 sont morts. Quel est le rapport entre le nombre de plants vivants et le nombre de plants qui a été semé par Martine au début du printemps?

5. Dans un sondage réalisé auprès de 150 personnes, 40 personnes parmi celles-ci ont refusé de répondre aux questions. Quel est le rapport entre le nombre de personnes ayant refusé de répondre et le nombre de personnes interrogées?

6. Francine a dilué 5 ml d'engrais liquide dans 2 L d'eau. Quel est le rapport entre les volumes de l'engrais et de l'eau dans le mélange?

Les rapports équivalents

On appelle proportion la relation entre des rapports équivalents. Ces derniers se réfèrent aux fractions équivalentes.

Deux rapports sont équivalents lorsqu'ils ont la même valeur décimale, ou lorsque les fractions représentant ces rapports sont égales une fois simplifiées .

Avec les notations décimales

$\frac{2}{3} = 0,\overline{66}$ et $\frac{1}{2} = 0,5$ ne sont pas des rapports équivalents, car ils n'ont pas la même notation décimale.

$\frac{4}{9} = 0,\overline{44}$ et $\frac{28}{63} = 0,\overline{44}$ sont des rapports équivalents, car ils ont la même notation décimale.

En simplifiant les fractions

Soit les deux rapports suivants

$$\frac{27}{36} = \frac{27 \div 9}{36 \div 9} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$$

Puisqu'on arrive au même rapport simplifié, on peut conclure que les deux rapports sont équivalents.

Exercice 2

Les rapports suivants forment-ils une proportion?

$\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$	$\frac{3,8}{2} = \frac{17.4}{5}$
$\frac{-9}{12} = \frac{-12}{16}$	$\frac{0,82}{4} = \frac{20,5}{100}$
$\frac{8}{3} = \frac{6}{2,25}$	$\frac{76}{100} = \frac{-6}{8}$
$\frac{7}{4} = \frac{14}{16}$	$\frac{-96}{3} = \frac{64}{-2}$
$\frac{5,5}{5} = \frac{9,9}{9}$	$\frac{10}{3} = \frac{100}{33}$
$\frac{75}{3} = \frac{500}{20}$	$\frac{84}{100} = \frac{8,4}{10}$

La relation de proportionnalité directe

Exemple 1

À l'hôpital, un patient a besoin de prendre un médicament. Un comprimé de ce médicament équivaut à 250 mg. Si le patient doit prendre 2 comprimés, combien de mg de médicament ingurgitera-t-il?

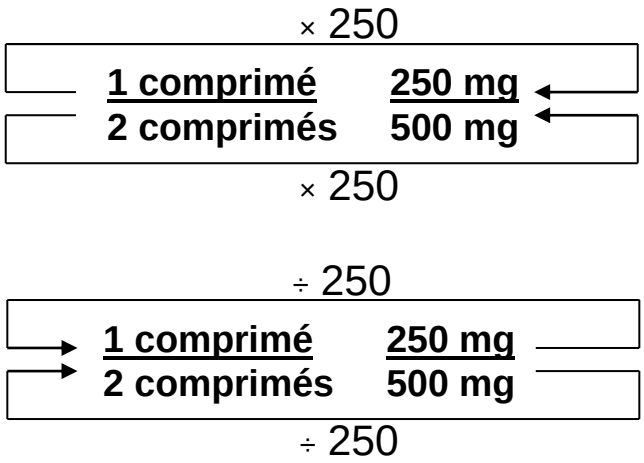
Puisque **le nombre de comprimés double**, on peut supposer que **la quantité en mg va également doubler**.

1er rapport		**2e rapport**
1 comprimé	← ***numérateur*** →	**250 mg**
2 comprimés	← ***dénominateur*** →	**500 mg**

On peut comparer deux quantités exprimées dans la même unité en les plaçant l'une en dessous de l'autre : on obtient alors ***un rapport sous forme de fraction***.

Si ces rapports sont égaux, on parle alors d'une **proportion.**

Dans une relation de proportionnalité directe entre deux rapports, lorsqu'on multiplie ou on divise le numérateur et le dénominateur d'un rapport par le même nombre, on obtient un rapport équivalent (égal).



Nous pouvons également dire que dans cette proportion, si le nombre de comprimés double, la quantité de médicaments en mg double également.

$$\times 2 \left[\rightarrow \frac{\textbf{1 comprimé}}{\textbf{2 comprimés}} = \frac{\textbf{250 mg}}{\textbf{500 mg}} \right] \times 2$$

Exemple 2

Un travailleur gagne 10 $ l'heure. Quel sera son salaire pour 7 heures de travail?

Puisque nous connaissons **le salaire du travailleur pour une heure (taux horaire)**, nous pouvons donc supposer, en nous basant sur le raisonnement appliqué précédemment, que **le salaire sera 7 fois plus grand pour 7 heures de travail.**

$$\times 7 \left[\rightarrow \frac{\textbf{1 h}}{\textbf{7 h}} \right] = \left[\frac{\textbf{10 \$}}{\textbf{?}} \right] \times 7$$

Salaire pour 7 heures = 7 X 10 = 70$

$$\begin{array}{c} \times 10 \\ \left[\frac{\textbf{1 h}}{\textbf{7 h}} = \frac{\textbf{10 \$}}{\textbf{70 \$}} \right] \\ \times 10 \end{array}$$

Le taux unitaire

On donne généralement le nom de ***taux*** à un rapport qui comporte des valeurs de natures différentes.

Exemple : $\frac{70\ \$}{7\ h}$; ce taux indique un salaire de 70 $ pour 7 heures de travail.

En divisant le numérateur (70$) par le dénominateur (7 h), on obtient le ***taux unitaire (pour un)***, qui représente ici le ***salaire pour une heure de travail.***

70 $ ÷ 7 h = 10 $ par heure ou $\frac{10\ \$}{1\ h}$

En connaissant le **taux unitaire**, qui est ici un **salaire horaire (salaire pour une heure de travail, ou taux horaire)**, il est possible de trouver le salaire pour n'importe quel nombre d'heures travaillées.

Un ouvrier est payé 150 $ pour 10 heures de travail. Quel est son salaire horaire (pour une heure de travail)?

Solution : $\frac{150\ \$}{10\ h}$ = 150 $ ÷ 10 h = $\frac{15\ \$}{h}$

Cet ouvrier gagne 15 $ de l'heure.

Une secrétaire a reçu 330 $ pour 20 heures de travail. Quel sera son salaire pour 25 heures de travail?

Solution : 1. Il faut tout d'abord trouver son taux horaire (taux unitaire)

$$\frac{330\ \$}{20\ h} = 330\ \$ \div 20\ h = \frac{16{,}50\ \$}{h}$$

2. Puisque nous connaissons maintenant son salaire pour une heure de travail, nous pouvons supposer que son salaire pour 25 heures sera 25 fois plus élevé.

25 X 16,50 $ = 412,50 $

Exercice 3

Vous avez reçu environ 1 100$ de salaire pour 2 mois de travail dans un emploi à temps partiel (horaire fixe). Combien aurez-vous pour…?

1 mois
4 mois
7 mois
3 mois

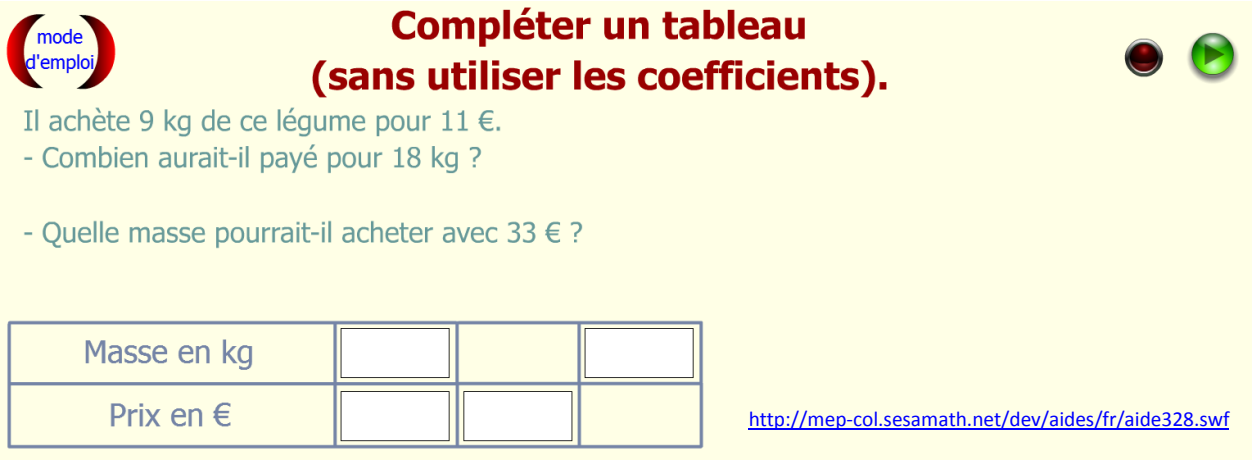
Exercice 4

Vous dépensez 45 $ pour l'achat de 3 chandails chez Sears. Combien coûte (coûtent)…?

1 chandail
4 chandails
5 chandails
12 chandails

Exercice 5

Résoudre des problèmes de proportions à l'aide d'un tableau.



Exercice 6 http://ressources.sesamath.net/coll_docs/cah/valide/manuel_accomp_6D1atoi_1.swf

Méthode 1 : Utiliser les propriétés de la proportionnalité

1 La voiture de Marie consomme 4,5 L d'essence sur 100 km.
a. Quelle sera sa consommation si elle parcourt 150 km ? 250 km ? 1 250 km ?
b. La voiture de Marie a consommé 13,5 L d'essence. Quelle distance a-t-elle parcourue ? Quelle distance peut-elle parcourir avec 135 L d'essence ?

Exercice 7

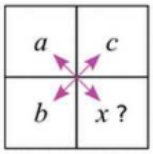
a) ***Exerciseur en ligne avec l'enseignante sur la résolution de problèmes de proportions.***

http://mep-col.sesamath.net/dev/swf/exo352.swf

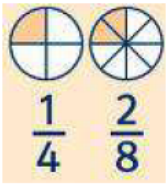
b) ***Exerciseur en ligne avec l'enseignante sur la résolution de problèmes de proportions à l'aide d'un tableau.***

http://mep-col.sesamath.net/dev/swf/exo362.swf

Le produit croisé (règle de trois)



Relation de proportionnalité directe



X 2

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

X 2

Ceci est une proportion

X 3

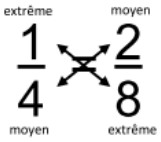
$\frac{1}{4} \neq \frac{3}{8}$

X 2

Ceci n'est pas une proportion

Nous pouvons nommer « proportion » deux rapports équivalents (égaux).

Dans le cas d'une proportion, le produit croisé (ou produit en croix) entre les termes extrêmes et les termes moyens donne toujours un résultat équivalent (loi fondamentale des proportions).

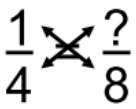


extrêmes moyens

$1 \times 8 = 4 \times 2$

$8 = 8$

Cette loi nous permet de trouver une valeur inconnue dans une proportion (appelée la « quatrième proportionnelle ») à partir de trois autres valeurs connues.



$4 \times ? = 1 \times 8$

$4 \times ? = 8$

$\frac{4}{4} \times ? = \frac{8}{4}$

$? = 2$

En algèbre, afin de faciliter le travail, nous utilisons une « variable » (lettre) pour représenter la valeur inconnue recherchée.

Exemple

Une voiture roule pendant 2 heures et couvre une distance de 220 km. En roulant à la même vitesse, quelle distance parcourra-t-elle en 5 heures?

km	220	d
heures	2	5

La distance parcourue en 5 heures est de 550 km.

$$\frac{220}{2} = \frac{d}{5}$$

$$2 \times d = 220 \times 5$$

$$2 \times d = 1\,100$$

$$\frac{2 \times d}{2} = \frac{1\,100}{2}$$

$$d = 550$$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes en utilisant la technique du produit croisé?

$\frac{8}{2} = \frac{2}{p}$	$\frac{40}{2m} = \frac{5}{0,5}$
$\frac{-y}{6} = \frac{-\frac{1}{4}}{12}$	$\frac{5n-1}{10} = \frac{2}{5}$

$\frac{40}{-m+7+12m} = \frac{2}{m-1}$	$15b + 2 = \frac{40b}{3}$
$\frac{2z}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{10}$	$\frac{8a+4}{8a+6} = \frac{2}{4}$
$\frac{-0,5z}{10} = \frac{4z+2,5z}{30}$	$\frac{4,5+3n}{n} = \frac{3}{2}$

$\frac{14}{7} = \frac{b}{4}$	$\frac{\frac{7}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{x}$

Pourcentage et produit croisé

On peut utiliser le produit croisé lorsqu'on souhaite transformer une fraction en pourcentage.

Exemple

Vous avez obtenu une note de 32 sur 40 lors d'une évaluation. Quelle est cette note en pourcentage?

$$\frac{32}{40} = ?\,\%$$

Étape 1 : Écriture de la proportion

$$\frac{32}{40} = \frac{x}{100}$$

Étape 2 : Technique du produit croisé et calculs

$\frac{32}{40} \times \frac{x}{100}$

$$40x = 32 \times 100$$

$$40x = 3\,200$$

$$\frac{40x}{40} = \frac{3\,200}{40}$$

$$x = 80$$

Étape 3 : Écriture des fractions équivalentes et du résultat en pourcentage

$$\frac{32}{40} = \frac{80}{100} = 80\%$$

Exercice 9

Transformer les fractions suivantes en pourcentage avec la méthode du produit croisé.

$\frac{12}{15}$	$\frac{8}{25}$
$\frac{11}{22}$	$\frac{32}{50}$
$\frac{65}{80}$	$\frac{42}{45}$

Capsule vidéo : Technique du produit croisé

http://revimathfp.weebly.com/capsules-produit-croiseacute.html

Exercice 10

Résoudre les problèmes suivants en utilisant la technique du produit croisé.

1. Louise parcourt 160 kilomètres en 2 heures. Quelle distance parcourra-t-elle en 5 heures ?

2. Madame Dupont a acheté 10 kilogrammes de sucre pour 4,95 $. Combien doit-elle demander à une voisine qui veut lui en acheter 3 kilogrammes ?

3. Claude a reçu 322,80 $ pour une semaine de 40 heures de travail. Au même salaire horaire, quel serait son traitement hebdomadaire s'il travaillait 8 heures de plus ?

4. Gilles a utilisé les 15 litres contenus dans son réservoir d'essence pour parcourir 280 kilomètres. Combien de kilomètres peut-il espérer parcourir avec 5 litres d'essence ?

5. À la boucherie, certaines étiquettes apposées sur les jambons sont incomplètes. Un jambon de 2,5 kg coûte 14,08 $. Quel prix devrait être inscrit sur un jambon de 1,8 kg ? (arrondissez au cent près).

6. Pour une fête d'enfants, vous achetez des petits jeux qui se vendent 4 pour 5 $. Combien devrez-vous débourser pour 11 jeux ?

La relation de proportionnalité indirecte

On dit que deux quantités sont ***inversement proportionnelles*** quand l'une augmente et l'autre diminue selon un même facteur.

Exemple 1 : relation inversement proportionnelle

Le temps requis pour parcourir une certaine distance est inversement proportionnel à la vitesse. Par exemple, pour parcourir une distance de 100 km :

- il faut ***2 heures*** lorsqu'on roule à une vitesse de ***50 km/h***
- il faut ***1 heure*** lorsqu'on roule à une vitesse de ***100 km/h***

Dans cet exemple, lorsqu'on ***double la vitesse***, le ***temps de parcours diminue de moitié*** *(pour une même distance)*.

Exemple 2 : technique de résolution d'une proportion inverse

Une voiture prend 3 heures pour parcourir une certaine distance en roulant à une vitesse de 30 km/h. À quelle vitesse devra-t-elle rouler pour parcourir cette même distance en 2 heures?

Étape 1 On pose la proportion comme si elle était directe, chacun des rapports à l'horizontal selon l'unité.

Vitesse (km/h) $\frac{30}{x}$
Temps (h) $\frac{3}{2}$

Étape 2 On inverse les quantités, soit au numérateur, soit au dénominateur

$$\frac{30}{3} = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{2} = \frac{x}{3}$$

Étape 3 On utilise la technique du produit croisé

$$\frac{30}{2} = \frac{x}{3}$$

$$2x = 90 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{2} = \frac{90}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 45$$

La vitesse sera donc de 45 km/h.

Exercice 11

Dire si la relation est directement ou inversement proportionnelle, et résoudre les problèmes suivants en utilisant la technique du produit croisé.

1. À l'épicerie, vous achetez un sac de 3 oranges pour 1,98 $. Combien vous auraient coûté 5 oranges?

2. Cinq peintres ont pris 6 heures pour faire un travail dans une maison. Combien de temps auraient pris 2 peintres pour faire le même travail, à la même vitesse?

3. Un employé a gagné 150 $ pour 11 heures de travail. Combien auraient-ils gagné d'argent pour 18 heures de travail?